

2021 年度 豊田工業大学
学部 推薦選抜（公募型）筆記試験問題

数 学

（注 意 事 項）

- (1) 試験開始の合図があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
- (2) 試験開始後、受験番号と氏名を解答用紙の所定欄に記入してください。
記入がない場合、0点になることがあります。
- (3) 解答はすべて解答用紙の所定欄に記入してください。
- (4) 試験時間は70分です。
- (5) 試験終了時刻まで退場することはできません。
- (6) 問題用紙は試験終了後に回収します。

【1】 次の各問いに答えよ.

(1) $x = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ のとき, 次の式の値を求めよ.

- (i) $x+y$ (ii) x^2+y^2 (iii) x^3y-xy^3

(2) 不等式 $|x-2| \leq \frac{2}{3}x$ ……① について, 次の問いに答えよ.

- (i) $x \geq 2$ のとき, ①を満たす整数 x は何個あるか.
(ii) 不等式①を解け.

(3) 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と2点 $(-1, 0)$, $(3, 0)$ で交わり, 点 $(2, 6)$ を通る.
このとき, この2次関数の $-2 \leq x \leq 2$ における最大値と最小値を求めよ.

(4) 円 O 外の点 P を通る2直線 l , m がある. l は円 O と2点 A , B で交わっていて, m は円 O と点 T で接している. $PA=4$, $AB=5$ のとき, PT の長さを求めよ. また, 円 O の中心と直線 l との距離が5のとき, 円 O の半径を求めよ.

(5) 方程式 $\log_{\frac{1}{2}}(x+4) = 2 \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$ の解を求めよ.

(6) 公比が実数である等比数列 $\{a_n\}$ の第 2 項が -24 , 第 5 項が 3 であるとき, $\{a_n\}$ の初項から第 6 項までの和を求めよ.

(7) 複素数 $z = 1 + \sqrt{3}i$ を極形式で表せ. また, $z^8 = a + bi$ と表すとき, 実数 a, b の値を求めよ.

(8) 関数 $f(x)$ が等式

$$\int_0^x (t+1)f'(t) dt = f(x) + 2x^3 - x^2 - 1$$

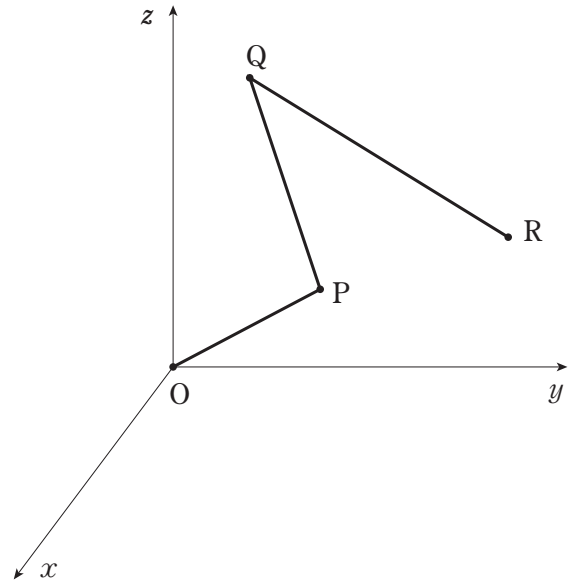
を満たすとき, $f'(x)$ と $f(x)$ を求めよ.

【2】 曲線 $C: y = \frac{\log x}{x}$ について、次の問いに答えよ.

(1) 曲線 C と x 軸との交点における C の接線の方程式を求めよ.

(2) $y = \frac{\log x}{x}$ が極大となる x の値を a とするとき、曲線 C と直線 $x = a$ および x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ.

【3】 座標空間の原点 O から伸びるロボットアームがある。図の OP , PQ , QR は長さがそれぞれ 1 , 2 , 2 の棒状のアームである。また、点 O , P , Q の部分は自由に回転する関節になっていて、あらゆる向きにアームを折り曲げることができる。関節は点、アームは線分とみなすものとして、次の問いに答えよ。



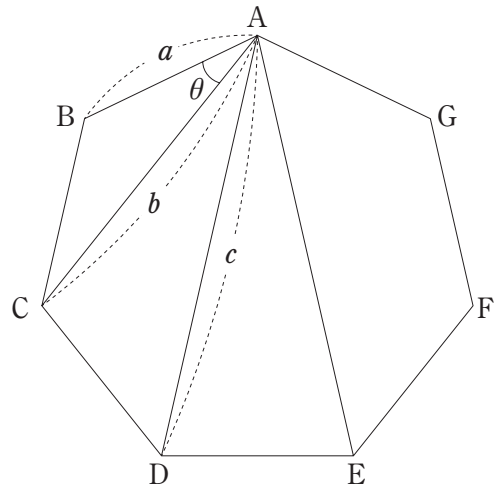
(1) $OQ = \frac{5}{3}$ のとき、 $\cos \angle OPQ$ を求め、さらに 3 点 O , P , Q を頂点とする三角形の面積を求めよ。

(2) $\vec{OP} \perp \vec{PQ}$, $\vec{PQ} \perp \vec{QR}$ のとき、内積 $\vec{OP} \cdot \vec{QR}$ を使って $|\vec{OR}|^2$ を表せ。また、原点 O と点 R との距離 $|\vec{OR}|$ の最大値を求めよ。

【4】 1 辺の長さが a の正七角形 ABCDEFG において,
 $\angle BAC = \theta$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

(1) θ を π で表せ.

(2) この正七角形の外接円の半径を 1 とし, 対角線 AC, AD の長さをそれぞれ b, c とするとき, b と c を θ を用いた正弦で表せ.



(3) 正七角形の 1 辺の長さ a と対角線の長さ b, c の間には

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

が成り立つことを示せ. その際, 次の定理を用いてもよい.

[トレミーの定理]

円に内接する四角形 PQRS では, 辺と対角線の長さについて等式

$$PQ \times RS + PS \times QR = PR \times QS$$

が成り立つ.